Ecuaciones de 2º grado

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Para **resolver ecuaciones de segundo grado** utilizamos la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si es a<0, multiplicamos los dos miembros por (−1).

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$(-1) \cdot (-x^2 + 7x - 10) = (-1) \cdot 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Se dice que una ecuación de segundo grado es **incompleta cuando alguno de los coeficientes, b o c, o ambos, son iguales a cero.**

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

$ax^2 = 0$

La solución es x = 0.

$2x^2 = 0 \qquad x = 0$

$\frac{2}{5}x^2 = 0 \qquad x = 0$

$ax^2 + bx = 0$

Extraemos factor común x:

$x(ax + b) = 0$

$x = 0$

$ax + b = 0 \qquad x = \frac{-b}{a}$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0$

$x - 5 = 0 \qquad x = 5$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x - 3) = 0$

$2x = 0 \qquad x = 0$

$x - 3 = 0 \qquad x = 3$

$ax^2 + c = 0$

Despejamos:

$$ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \qquad \begin{aligned} &\nearrow x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ &\searrow x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{aligned}$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \qquad \begin{aligned} &\nearrow x_1 = \sqrt{25} = 5 \\ &\searrow x_2 = -\sqrt{25} = -5 \end{aligned}$$

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8 \qquad x^2 = -4 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

Estudio de las soluciones de la ecuación de 2º grado

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \text{Discriminante}$$

$b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación y permite averiguar en cada ecuación el número de soluciones. Podemos distinguir tres casos:

$b^2 - 4ac > 0$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$b^2 - 4ac = 0$

La ecuación tiene una solución doble.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$b^2 - 4ac < 0$

La ecuación no tiene soluciones reales.

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{1} \notin \mathbb{R}$$

Propiedades de las soluciones de la ecuación de 2º grado

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ecuación de 2º grado a partir de sus soluciones

Si conocemos las raíces de una ecuación, podemos escribir ésta como:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Siendo $S = x_1 + x_2$ y $P = x_1 \cdot x_2$

Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y −2.

S= 3 − 2 = 1

P = 3 · 2 = 6

$x^2 - x + 6 = 0$

Factorización de un trinomio de segundo grado

$a x^2 + bx + c = 0$

$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

Ecuaciones racionales

La ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen fracciones polinómicas.

Resolución de ecuaciones racionales

Para resolver ecuaciones racionales se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Debemos comprobar las soluciones, para rechazar posibles soluciones extrañas provenientes de la ecuación transformada (la resultante de multiplicar por el mínimo común múltiplo), pero que no lo son de la ecuación original.

$$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x - 1} = 0$$

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

$$m.c.m.(x^2 - x,\ x - 1) = x(x - 1)$$

$$1 - x = 0 \qquad x = 1$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{1}{1 - 1} - \frac{1}{1 - 1} = 0 \qquad \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$$

La ecuación no tiene solución porque para x = 1 se anulan los denominadores.

$$\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$$

$$m.c.m.(x - 2,\ x + 2,\ x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2)$$

$$x + 2 + x - 2 = 1 \qquad 2x = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$$

Ecuaciones bicuadradas

Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones de cuarto grado **sin términos de grado impar:**

$ax^4 + bx^2 + c = 0$

Resolución de ecuaciones bicuadradas

Para resolver ecuaciones bicuadradas, efectuamos el cambio $x^2 = t$, $x^4 = t^2$; con lo que genera una ecuación de segundo grado con la incógnita t:

$at^2 + bt + c = 0$

Por cada valor positivo de t habrá dos valores de x:

$$x = \pm\sqrt{t}$$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ t_2 = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

El mismo procedimiento podemos utilizar para resolver las ecuaciones del tipo:

$ax^6 + bx^3 + c = 0$

$ax^8 + bx^4 + c = 0$

$ax^{10} + bx^5 + c = 0$

$$x^6 - 7x^3 + 6 = 0$$

$$x^3 = t$$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} t_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^3 = 6$ $\qquad$ $x = \sqrt[3]{6}$

$x^3 = 1$ $\qquad$ $x = \sqrt[3]{1}$ $\qquad$ $x = 1$

Ecuaciones irracionales

Las ecuaciones irracionales, o ecucaciones con radicales, son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical.

$$\sqrt{2x-3} - x = -1$$

Resolución de ecuaciones irracionales

1º Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.

2º Se elevan al cuadrado los dos miembros.

3º Se resuelve la ecuación obtenida.

4º **Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial**. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación.

5º Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten las dos primeras fases del proceso hasta eliminarlos todos.

$$\sqrt{2x-3} - x = -1$$

1º Aislamos el radical:

$$\sqrt{2x-3} = -1 + x$$

2º Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = (-1+x)^2$$

$$2x - 3 = 1 - 2x + x^2$$

3ºResolvemos la ecuación:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

4ºComprobamos:

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} - 2 = -1 \qquad 1 - 2 = -1$$

La ecuación tiene por solución x = 2.

$$\sqrt{x} + \sqrt{x - 4} = 2$$

$$\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x - 4}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{x - 4}\right)^2$$

$$x = 4 - 4\sqrt{x - 4} + x - 4$$

$$4\sqrt{x - 4} = 0 \qquad \sqrt{x - 4} = 0$$

$$\left(\sqrt{x - 4}\right)^2 = 0^2 \qquad x - 4 = 0 \qquad x = 4$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{4 - 4} = 2 \qquad 2 + 0 = 2$$

La ecuación tiene por solución x = 4.

Ecuaciones de grado superior a dos

Es una ecuación de cualquier grado escrita de la forma P(x) = 0, el polinomio P(x) se puede descomponer en factores **de primer y segundo grado**, entonces basta i**gualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes**.

$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

Por ser la división exacta, **D = d · c**

$(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6) = 0$

Una raíz es x = 1 .

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5x - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6) = 0$

Otra raíz es x = -1 .

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar raíces enteras.

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

Las soluciones son: x = 1, x = − 1, x = −2 y x = 3/2

Método de Gauss

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

El **método de Gauss** consiste en utilizar el **método de reducción** de manera que **en cada ecuación tengamos una incógnita menos que en la ecuación precedente**.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1º Ponemos como **primera ecuación** la que tenga el como **coeficiente de x: 1 ó -1**, en caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

2º Hacemos **reducción con la 1ª y 2ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x de la 2ª ecuación**. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

$E'_2 = E_2 - 3E_1$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -y + 4z = -2}$$

3º Hacemos lo mismo con la ecuación **1ª y 3ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x**.

$E'_3 = E_3 - 5E_1$

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2 \\ -5x - 5y + 5z = -5 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -2y + 9z = -3}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{cases}$$

4º Tomamos las ecuaciones **2ª y 3ª**, trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

$E''_3 = E'_3 - 2E'_2$

$$\begin{cases} -2y + 9z = -3 \\ 2y - 8z = 4 \end{cases}$$
$$z = 1$$

5º Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

6º Encontrar las soluciones.

z = 1

− y + 4 ·1 = −2   y = 6

x + 6 −1 = 1   x = −4

Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando **al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado**.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el **método de sustitución**, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1º Se **despeja una incógnita** en una de las ecuaciones, preferentemente en **la de primer grado**.

y = 7 − x

2º **Se sustituye** el valor de la incógnita despejada **en la otra ecuación.**

$x^2 + (7 - x)^2 = 25$

3º **Se resuelve la ecuación** resultante.

$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$

$2x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

4º Cada uno de l**os valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación**, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

$x = 3$ $y = 7 - 3$ $y = 4$

$x = 4$ $y = 7 - 4$ $y = 3$

Ecuaciones de segundo grado. Resumen

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Se resuelve mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si es $a<0$, multiplicamos los dos miembros por (-1).

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

$ax^2 = 0$

La solución es $x = 0$.

$ax^2 + bx = 0$

Extraemos factor común x.

Igualamos cada factor a 0 y resolvemos las ecuaciones de 1er grado.

$x = 0$.

$$ax + b = 0 \qquad x = \frac{-b}{a}$$

$ax^2 + c = 0$

Despejamos:

$$ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{-c}{a}} \\[2ex] x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \end{cases}$$

Estudio de las soluciones

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\boxed{b^2 - 4ac}}}{2a} \rightarrow \textbf{Discriminante}$$

$b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación y permite averiguar en cada ecuación el número de soluciones. Podemos distinguir tres casos:

$b^2 - 4ac > 0$

La ecuación tiene dos soluciones, que son números reales distintos.

$b^2 - 4ac = 0$

La ecuación tiene una solución doble.

$b^2 - 4ac < 0$

La ecuación no tiene soluciones reales.

Propiedades de las soluciones

La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado es igual a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ecuación de 2º grado a partir de sus soluciones

Si conocemos las raíces de una ecuación, podemos escribir ésta como:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Siendo $S = x_1 + x_2$ y $P = x_1 \cdot x_2$

Factorización de un trinomio de segundo grado

$$a x^2 + bx + c = 0$$

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Ecuaciones racionales

La ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen fracciones polinómicas.

Para resolverlas se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

***Debemos comprobar las soluciones*,** para rechazar posibles soluciones extrañas provenientes de la ecuación transformada (la resultante de multiplicar por el mínimo común múltiplo), pero que no lo son de la ecuación original.

Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de cuarto grado **sin términos de grado impar**:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Para resolverlas, efectuamos el cambio $x^2 = t$, $x^4 = t^2$; con lo que genera una ecuación de segundo grado con la incógnita t:

$$at^2 + bt + c = 0$$

Por cada valor positivo de t habrá dos valores de x:

$$x = \pm\sqrt{t}$$

Ecuaciones irracionales

Las ecuaciones irracionales son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical.

Resolución:

1º Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.

2º Se elevan al cuadrado los dos miembros.

3º Se resuelve la ecuación obtenida.

4º **Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial**. Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra que tiene las mismas soluciones que la dada y, además las de la ecuación que se obtiene cambiando el signo de uno de los miembros de la ecuación.

5º Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten las dos primeras fases del proceso hasta eliminarlos todos.

Ecuaciones de grado superior a dos

Es una ecuación de cualquier grado escrita de la forma P(x) = 0, el polinomio P(x) se puede descomponer en factores **de primer y segundo grado**, entonces basta i**gualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes**.

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas: Método de Gauss

Este método consiste en utilizar el **método de reducción** de manera que **en cada ecuación tengamos una incógnita menos que en la ecuación precedente**.

1º Ponemos como **primera ecuación** la que tenga el **coeficiente en x más bajo**.

2º Hacemos **reducción con la 1ª y 2ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x de la 2ª ecuación**. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

$\mathbf{E'_2 = E_2 - 3E_1}$

3º Hacemos lo mismo con la ecuación **1ª y 3ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x**.

$\mathbf{E'_3 = E_3 - 5E_1}$

4º Tomamos las ecuaciones **2ª y 3ª**, trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

$\mathbf{E''_3 = E'_3 - 2E'_2}$

5º Obtenemos el sistema equivalente **escalonado.**

6º Encontrar las soluciones.

Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando **al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado**.

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el **método de sustitución**, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1º Se **despeja una incógnita** en una de las ecuaciones, preferentemente en **la de primer grado**.

2º **Se sustituye** el valor de la incógnita despejada **en la otra ecuación.**

3º **Se resuelve la ecuación** resultante.

4º Cada uno de l**os valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación**, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.